

Série 9

Exercice 9.1

Le mécanisme d'entraînement d'un treuil peut être schématisé par la **Figure 9.1.1** ci-dessous. Ce système est formé d'un moteur à inertie J_1 entraînant une première poulie d'inertie J_2 et de rayon R_2 par un arbre de longueur l , de section à moment d'inertie polaire I_p et de module de glissement G . Par l'intermédiaire d'une courroie de longueur libre l' , de section A' et de module d'élasticité E' , la première poulie entraîne une seconde d'inertie J_3 et de rayon R_3 , supportée par le tambour d'enroulement de rayon r_3 . La courroie est suffisamment pré-chargée pour que les deux brins restent en traction dans tous les cas. Le câble du treuil est caractérisé par une section A , un module d'élasticité E et une longueur h à un état stationnaire donné et soulève une masse m . Le câble est supposé constamment tendu. Le couplage élastique magnétique entre le rotor et le stator du moteur est représenté par une rigidité de torsion k'_0 . On choisira les variables φ_1 , φ_2 , φ_3 et x_4 , dénotant respectivement les angles de rotation du moteur et des deux poulies, ainsi que le déplacement vertical de la masse.

Établir les équations différentielles, sous forme matricielle, des petits mouvements de ce système autour d'un point de fonctionnement stationnaire quelconque.

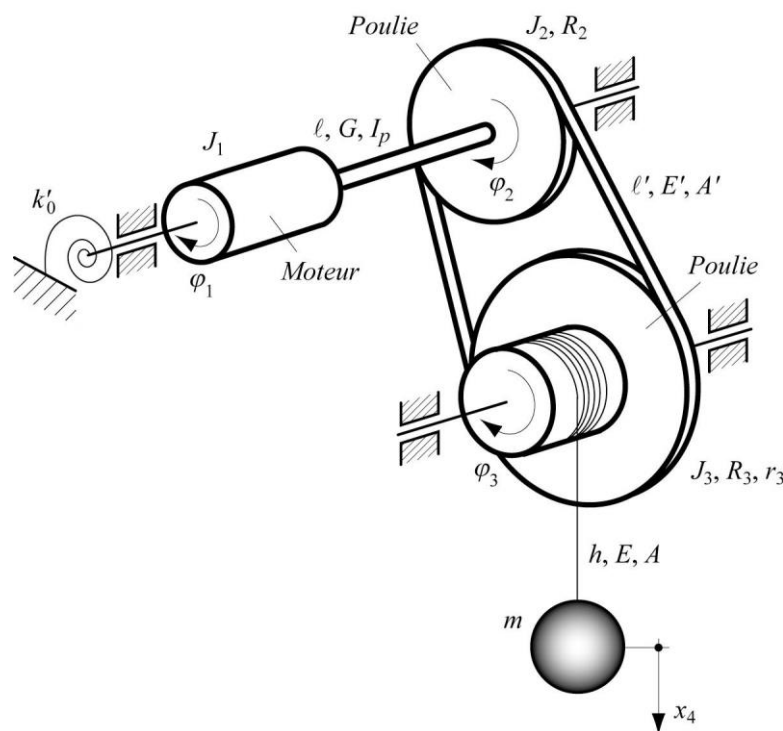


Figure 9.1.1 | Schéma du système.

Exercice 9.2

Une poutre de longueur $3l$, de module d'élasticité E et de section à moment d'inertie I supporte deux masses m_1 et m_2 comme indiqué dans la Figure 9.2.1 ci-dessous.

Pour ce système à deux degrés de liberté, **chercher la matrice des coefficients d'influence (compliance), puis déterminer les fréquences et formes propres. Représenter ces formes propres et vérifier leur orthogonalité.**

Application numérique : $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 10$ kg, $l = 0.5$ m, $I = 10^{-8}m^4$, $E = 210$ GPa

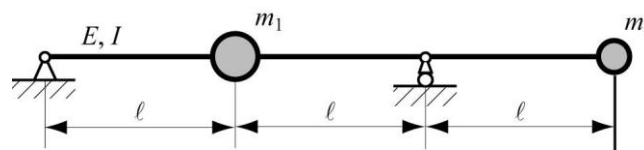


Figure 9.2.1 | Schéma du système.

Indications : Pour déterminer la matrice des coefficients d'influence, on considèrera deux perturbations correspondant à une charge unitaire agissant soit sur m_1 soit sur m_2 . Ensuite, décomposez les différents cas de perturbation en cas de chargement simple pour chaque tronçon de poutre et combinez les contributions pour obtenir les déplacements des masse m_1 et m_2 .

Les déformées d'une poutre de longueur l , soumise à une force P ou à un moment de flexion M et illustrée ci-dessous à la Figure 9.2.2 valent respectivement :

- a. $y_a(x) = \frac{P}{48EI} (3l^2x - 4x^3)$ pour $x \leq \frac{l}{2}$
- b. $y_b(x) = \frac{M}{6EI} (x^3 - 3lx^2 + 2l^2x)$
- c. $y_c(x) = \frac{P}{6EI} (3lx^2 - x^3)$

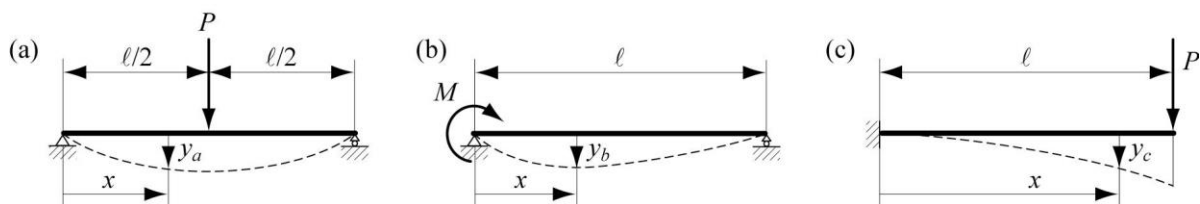


Figure 9.2.2 | Déformées de poutres de longueur l.